Compitino di algebra lineare del 31 maggio 2017

Istruzioni: I fogli per svolgere gli esercizi vi saranno forniti. Consegnate solo la bella e il foglio con gli esercizi e motivate sempre le vostre risposte. Sarà valutata anche l'esposizione e non saranno corretti esercizi illeggibili. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari, pena l'annullamento del compito.

Esercizio 1. Sia g un prodotto scalare su uno spazio vettoriale reale V. Sia $U \subset V$ un sottospazio.

(1) Definisci $U^\perp$ e mostra che è un sottospazio vettoriale di V.
(2) Esibisci concretamente un caso in cui $\dim U + \dim U^\perp = \dim V$ ma U e $U^\perp$ non sono in somma diretta (devi scegliere V, g, U opportuni e espliciti).

Esercizio 2. Considera l'endomorfismo $L_A \colon \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ dato dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(1) Determina due autovettori indipendenti per A.
(2) La matrice A è diagonalizzabile?
(3) Determina il polinomio minimo di A.
(4) Determina la forma di Jordan di A.

Esercizio 3. Sia $V = \mathbb{R}_2[x]$ lo spazio vettoriale formato dai polinomi reali di grado al massimo due. Considera il prodotto scalare g su V definito nel modo seguente:

$$g(p,q) = p(0)q(0) + p'(1)q'(1) - p''(-1)q''(-1)$$

dove p' e p'' indicano la derivata prima e seconda di p (e analogamente per q' e q'').

(1) Determina la segnatura di g.
(2) Esiste un sottospazio $W \subset V$ di dimensione 2 tale che la restrizione $g|_W$ abbia segnatura $(1,1,0)$?
(3) Esiste un sottospazio $W \subset V$ di dimensione 2 tale che la restrizione $g|_W$ abbia segnatura $(0,0,2)$?

Esercizio 4. Scrivi una isometria affine $f(x) = Ax + b$ di $\mathbb{R}^3$ che soddisfi le proprietà seguenti:

(1) $f(\pi) = \pi$ dove π è il piano affine $\pi = \{x_1 = x_2\}$;
(2) f non ha punti fissi;
(3) $\det A = 1$ e $A \neq I$.

Se non riesci a risolvere l'esercizio in questo modo, puoi togliere l'ipotesi (2), cioè che f non abbia punti fissi. In questo caso l'esercizio svolto avrà un punteggio inferiore.

Soluzioni

Esercizio 1.

(1) Fatto a lezione.
(2) Ad esempio $\mathbb{R}^2$ con prodotto scalare $g(x,y) = x_1y_1 - x_2y_2$ e $U = \text{Span}(e_1 + e_2)$.

Esercizio 2. Il polinomio caratteristico è $(\lambda - 2)^4$. Otteniamo

$$V_2 = \ker \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

I due generatori di V_2 sono autovalori indipendenti. La matrice non è diagonalizzabile perché la molteplicità geometrica di 2 è 2 e non 4. Ne ricaviamo in particolare che la matrice di Jordan J di A ha due blocchi di Jordan con autovalore 2. Verifichiamo che $(A - 2I)^2 \neq 0$, quindi c'è un blocco di ordine almeno tre. L'unica possibilità quindi è che

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Il polinomio minimo quindi è $m(x) = (\lambda - 2)^3$.

Esercizio 3. La matrice associata nella base canonica è

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Con il criterio di Jacobi troviamo che la segnatura è $(2,1,0)$. La restrizione sul sottospazio $U = \mathrm{Span}(x, x^2)$ ha segnatura $(1,1,0)$.

Non può esistere un sottospazio U di dimensione 2 su cui la restrizione abbia segnatura $(0,0,2)$: se esistesse, prendendo una base v_1, v_2 di U e completando ad una base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ di V otterrei che la matrice associata $S' = [g]_{\mathcal{B}}$ in questa base ha una sottomatrice quadrata 2×2 tutta nulla, e questo implicherebbe facilmente che $\det S' = 0$, ma deve essere $\det S' < 0$. Assurdo.

Esercizio 4. Si può prendere una rototraslazione di angolo π lungo una qualsiasi retta $r \subset \pi$. Ad esempio possiamo scegliere $r = \{x = y = 0\}$. In questo caso scriviamo $f(x) = Ax + b$ con

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}.$$

Qui c è un qualsiasi numero diverso da zero, ad esempio $c = 1$ va bene. Brevemente:

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ z + c \end{pmatrix}.$$